

Corrigé du partiel, mars 06

Exercice 1

Les réponses sont synthétisées dans le tableau suivant :

	T_1	T_2	T_3	T_4
1	oui	non	non	oui
2	non	/	/	oui
3	oui	/	/	non

Justification:

• ligne 1 :

(1,1) et (1,4) : on a vu en cours que T_1 et T_4 sont des tribus.

(1,2) et (1,3) : les parties T_2 et T_3 ne sont pas stables par passage au complémentaire. Ce ne sont donc pas des tribus. Les questions 2 et 3 ne s'appliquent donc pas dans ce cas.

• ligne 2 : La fonction f prend les valeurs 0 et 1, et pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{0, 1\} \text{ si } A \ni 0 \text{ et } A \not\ni 1, \\ f^{-1}(A) &= \{2\} \text{ si } A \not\ni 0 \text{ et } A \ni 1, \\ f^{-1}(A) &= \emptyset \text{ si } A \not\ni 0 \text{ et } A \not\ni 1, \\ f^{-1}(A) &= E \text{ si } A \ni 0 \text{ et } A \ni 1. \end{aligned}$$

On en déduit que f est mesurable de (E, T_4) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, mais pas de (E, T_1) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (car, par exemple, $f^{-1}(\{1\}) = \{2\} \notin T_1$).

• ligne 3 : L'application m est bien une mesure sur (E, T_1) ou (E, T_4) . En effet, on a bien $m(\emptyset) = 0$, et si A et $B \in T_1$ ou T_4 sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(\{k \in A \cup B, k \text{ pair}\}) = \text{card}(\{k \in A, k \text{ pair}\}) + \text{card}(\{k \in B, k \text{ pair}\})$. Remarquons que comme l'ensemble est fini, la propriété de σ -additivité revient ici à la propriété d'additivité.

Exercice 2

Supposons d'abord qu'il existe A tel que f_n converge uniformément vers f sur A lorsque $n \rightarrow +\infty$, et montrons que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Posons

$$M_n = \sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)|.$$

Il est clair que $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n$, pour tout $x \in A^c$; or A est de mesure nulle, et on a donc :

$$M_n \in \{C; |f_n - f| \leq C \text{ p.p.}\},$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \inf\{C; |f_n - f| \leq C \text{ p.p.}\} \leq M_n.$$

Or par hypothèse,

$$M_n = \sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Réciproquement, supposons maintenant que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Remarquons dans un premier temps que pour toute fonction mesurable g de E dans \mathbb{R} , on a : $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p..

En effet, par définition de $\|\cdot\|_\infty$, il existe une suite décroissante $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que $|g| \leq C_k$ p.p., i.e. il existe B_k tel que $|g(x)| \leq C_k$ pour tout $x \in A_k^c$, avec $m(B_k) = 0$. Soit $B = \cup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. On a donc : $|g(x)| \leq C_k, \forall x \in B^c$, et $m(B) = 0$. On en déduit par passage à la limite sur k que

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty, \forall x \in A^c,$$

et donc que $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p..

En appliquant ce résultat à $f_n - f$, on en déduit en particulier qu'il existe B_n de mesure nulle tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \forall x \in B_n^c$, et donc que $\sup_{x \in B_n^c} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. Soit $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, alors $m(A) = 0$ et $\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur A^c .

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $E = \{1, \dots, n\}$, $T = \mathcal{P}(E)$, et m la mesure de dénombrement, définie par :

$$m(A) = \text{card}(A) \quad (A \in T).$$

Alors (E, T, m) est un exemple d'espace mesuré ayant la propriété de l'énoncé, puisque pour tout $x \in E$, $m(\{x\}) = 1$.

2. (a) On a

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{p,n} \right),$$

de sorte qu'il suffit, pour montrer que $\{f \neq 0\}$ est dénombrable, de prouver que chaque $A_{p,n}$ l'est.

Montrons qu'en fait, chaque $A_{p,n}$ est fini. Si, pour $p, n \in \mathbb{N}^*$ fixés, $A_{p,n}$ comporte une infinité d'éléments, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe k éléments x_1, \dots, x_k de $A_{p,n}$ deux à deux distincts. On a alors :

$$\int |f| dm \geq \int_{\{x_1, \dots, x_k\}} |f| dm = \int |f| \sum_{l=1}^k 1_{\{x_l\}} dm$$

puisque les x_l sont deux à deux distincts. Or, $|f| \sum_{l=1}^k 1_{\{x_l\}} = \sum_{l=1}^k |f(x_l)| 1_{\{x_l\}}$, et par conséquent,

$$\int |f| dm \geq \sum_{l=1}^k |f(x_l)| m(\{x_l\}) \geq \frac{k}{pn}$$

puisque pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, $x_l \in A_{p,n}$. Cela impose $\int |f| dm = +\infty$ et contredit l'intégrabilité de f .

- (b) On a :

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f^+ 1_{\{f \neq 0\}} dm - \int f^- 1_{\{f \neq 0\}} dm.$$

Or, les x_n sont distincts, donc

$$f^+ 1_{\{f \neq 0\}} = f^+ \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{x_n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(x_n) 1_{\{x_n\}}.$$

La suite $(f^+(x_n)1_{\{x_n\}})$ étant une suite de fonctions mesurables positives, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^p f^+(x_n)1_{\{x_n\}})_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante de fonctions mesurables positives : on obtient donc grâce au théorème de convergence de convergence monotone :

$$\int f^+ 1_{\{f \neq 0\}} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int f^+(x_n) 1_{\{x_n\}} dm = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(x_n) m(\{x_n\}).$$

De même, on a : $\int f^- 1_{\{f \neq 0\}} dm = \sum_{n=1}^{\infty} f^-(x_n) m(\{x_n\})$, et ainsi

$$\int f dm = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) m(\{x_n\}).$$

On a également $|f| \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, m)$; de plus, $\{|f| \neq 0\} = \{f \neq 0\}$, donc en appliquant le résultat ci-dessus à $|f|$, on obtient :

$$\int |f| dm = \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| m(\{x_n\}),$$

et par conséquent la série $\sum f(x_n) m(\{x_n\})$ est absolument convergente.

Exercice 4

1. Si f et g sont quasi-intégrables, $f + g$ n'est pas nécessairement quasi-intégrable (prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 1_{[0, +\infty[}$ et $g = -1_{]-\infty, 0]}$; on a alors $f^- = g^+ = 0$, $(f + g)^+ = f$ et $(f + g)^- = -g$).

On peut également avoir f, g et $f + g$ quasi-intégrables, mais $\int f dm + \int g dm$ non défini (prendre par exemple $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 1$ et $g = -1$; alors $f^- = g^+ = f + g = 0$, mais $\int f dm = +\infty$ et $\int g dm = -\infty$).

On vérifie toutefois facilement que si f et g sont quasi-intégrables, et si $\int f dm + \int g dm$ est défini, alors $f + g$ est quasi-intégrable et

$$\int (f + g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On vérifie également aisément que si f est quasi-intégrable et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est quasi-intégrable et

$$\int (\alpha f) dm = \alpha \int f dm.$$

Si f et g sont quasi-intégrables et si $f \leq g$, alors $f^+ \leq g^+$ et $f^- \geq g^-$, de sorte que $\int f^+ dm \leq \int g^+ dm$ et $\int f^- dm \geq \int g^- dm$, d'où il résulte que

$$\int f dm \leq \int g dm.$$

2. Supposons que (f_n) soit croissante et que f_0^- soit intégrable. On a :

$$\int f_n dm = \int f_n^+ dm - \int f_n^- dm \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La suite (f_n^+) est une suite croissante de fonctions positives et mesurables, donc par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n^+ dm = \int \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^+ \right) dm.$$

On a :

$$0 \leq f_n^- \leq f_0^- \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1)$$

avec $f_0^- \in \mathcal{L}^1$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^-$ est définie partout et appartient à \mathcal{M} . Il en résulte par le théorème de convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^- \in \mathcal{L}^1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n^- dm = \int \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^- \right) dm.$$

Notons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. On a $f \in \mathcal{M}$, et l'on vérifie facilement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^+ = f^+ \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^- = f^-.$$

Alors (1) montre que $0 \leq f^- \leq f_0^-$, d'où il résulte que $f^- \in \mathcal{L}^1$, et par conséquent f est quasi-intégrable. En outre,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n dm = \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.$$

Si maintenant (f_n) est décroissante et si f_0^+ est intégrable, le résultat voulu s'obtient en appliquant ce qui précède à la suite $(-f_n)$ (remarquer que $(-f_0)^- = f_0^+ \in \mathcal{L}^1$).

3. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq g$, où $g \in \mathcal{L}^1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n^- \leq g^-$, donc f_n est quasi-intégrable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. On a $g_n \geq g$, donc $0 \leq g_n^- \leq g^-$, et par conséquent g_n est quasi-intégrable. Pour tout $k \geq n$, $g_n \leq f_k$, donc d'après la question 1, $\int g_n dm \leq \int f_k dm$. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int g_n dm \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k dm. \quad (2)$$

Or, (g_n) est une suite croissante de fonctions quasi-intégrables. De plus, on a supposé que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ est à valeurs réelles. Enfin, g_0^- est intégrable (on a vu que $0 \leq g_0^- \leq g^-$). La question 2 montre donc que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est quasi-intégrable et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm = \int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n dm,$$

ce qui, vu (2), donne le résultat souhaité.

Si maintenant on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq g$ avec $g \in \mathcal{L}^1$, le résultat voulu s'obtient en appliquant ce qui précède à la suite $(-f_n)$.