Universités de Marseille,
Licence de Mathématiques par téléenseignement
Mesure et intégration
Corrigé du partiel, 11 mars 2005

Exercice 1

Soit (E, T) un espace mesurable.

1. Soit m une application σ-additive de T dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $m(\emptyset) = 0$.

   corrigé

   Voir polycopié page 25, définition de la mesure signée. Noter qu'il faut utiliser le fait que m est finie, car si m est infinie, le fait que $m(\emptyset) = \alpha > 0$ ne contredit pas (2.10).

   (b) On définit l'intégrale par rapport à m d'une fonction caractéristique 1_A d'un élément A de T par $\int 1_A dm = m(A)$. On définit ensuite l'intégrale d'une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1,N} \alpha_i 1_{A_i}$ par $\int f dm = \sum_{i=1,N} \alpha_i m(A_i)$. Cette définition a-t-elle un sens (justifier brièvement)? Peut-on alors définir l'intégrale des fonctions mesurables positives par passage à la limite?

   corrigé

   Oui, il s'agit d'une somme finie de termes finis (car m est finie), donc même si les termes ne sont pas tous positifs, cette définition a un sens.

   Peut-on alors définir l'intégrale des fonctions mesurables positives ?

   corrigé

   Une mesure signée n'est pas monotone, c.à.d. que la propriété $m(A) \leq m(B)$ si $A \subset B$ n'est pas vérifiée. Du coup, l'intégrale définie précédemment n'est pas non plus monotone, et donc si on prend une suite croissante de fonctions étagées positives, la suite des intégrales n'est pas forcément monotone, et donc n'admet pas forcément de limite. On ne peut donc pas passer à la limite sur les intégrales des fonctionsétagées positives.

   (c) On suppose maintenant que m est une mesure positive sur T. Pour chacune des hypothèses suivantes sur f :

   i. $f \in \mathcal{E}_+$,
   ii. $f \in \mathcal{M}_+$,
   iii. $f \in \mathcal{M}$,
   iv. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   v. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

   examiner la véracité de chacune des assertions suivantes (justifier brièvement les réponses) :

$$\int f dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \tag{1}$$

$$\int f dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.} \tag{2}$$

$$\int |f|dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \tag{3}$$

$$\int |f|dm = 0 \text{ si et seulement si } f = 0 \text{ p.p.} \tag{4}$$

corrigé

Si $f \in \mathcal{E}_+$,, ou si $f \in \mathcal{M}_+$, les assertions (2) et (4) sont vraies, car dans ce cas la fonction est positive (pour (2)), et l'intégrale ne voit pas les ensembles de mesure nulle. Par contre (1) et (3) sont fausses, il suffit de prendre par exemple pour m la mesure de Lebesgue et pour f la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs.

Si $f \in \mathcal{M}$, alors $|f| \in \mathcal{M}_+$, donc l'assertion (4) est encore vérifiée, par contre l'assertion 2 ne l'est pas puisque l'intégrale de f n'est même pas définie... Les assertions (1) et (3) sont également fausses, pour (1) l'intégrale n'est pas définie, et pour (3), pour la même raison que si $f \in \mathcal{E}_+$.

Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, là encore seule l'assertion (4) est vérifiée (on rappelle que $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$) Enfin si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, l'assertion (3) est vérifiée car $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$), et par confusion entre la classe f dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, et un repésentant encore noté f de la classe dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on peut aussi écrire, par abus de notation, l'assertion (4).

Exercice 2

Soit m une mesure sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $I + x = \{y \in \mathbb{R}; \exists z \in I; y = z + x\}$.. On suppose que la mesure m est telle que :

$$\text{Pour tout intervalle } I \text{ de } \mathbb{R} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}, m(I) = m(I + x) \tag{5}$$

et

$$m([0,1]) = 1 \tag{6}$$

1. Montrer que $m(\{x\}) = m(\{y\})$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

corrigé

Soient x et $y \in \mathbb{R}$. On prend $I = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $I + x = \{x\}$ et $I + y = \{y\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(I) = m(I + x) = m(\{x\}) = m(I + y) = m(\{y\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = m(\{y\}) = \alpha$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que $m(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

corrigé

Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse)

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $m([0, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$.

corrigé

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[) + m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = m([0, \frac{1}{q}[)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, q-1\}$, car $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+\frac{i}{q}$. On en déduit :

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = qm([0, \frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$.

4. En déduire que m est la mesure de Lebesgue.

corrigé

la question 2, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m([x, x + \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, car $[x, x + \frac{1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+x$.

En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$m([0, \frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{7}$$

De (7), on va déduire $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. Comme $[\alpha, \beta[= [0, \gamma[+\alpha$, avec $\gamma = \beta - \alpha$, on a $m([\alpha, \beta[) = m([0, \gamma[)$. Il existe alors deux suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ t.q. $r_n \uparrow \gamma$ et $s_n \downarrow \gamma$ quand $n \to \infty$. Comme $[0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[$, on a, grâce à (7), $r_n = m([0, r_n[) \le m([0, \gamma[) \le m([0, s_n[) = s_n$. Eh faisant $n \to \infty$, on en déduit que $m([0, \gamma[) = \gamma$ et donc $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.

Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, on a aussi

$$m(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta.$$

La partie "unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Exercice 3 (Convergence essentiellement uniforme et convergence presque uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \le C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et donc que $\|f\|_\infty \in A_f$.

corrigé

Comme $A_f \neq \emptyset$ et $\|f\|_\infty = \inf A_f$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_f$ t.q. $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \in A_f$ on déduit qu'il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f(x)| \le a_n$ pour tout $x \in B_n^c$.

On pose $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. On a donc $B \in T$ et, par σ-additivité de m, $m(B) = 0$ (car $m(B) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)$). Enfin, pour tout $x \in B^c = \cap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c$, on a $|f(x)| \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$, on en déduit que $|f(x)| \le \|f\|_\infty$. On a donc $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p., c'est-à-dire $\|f\|_\infty \in A_f$.

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

   corrigé

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$, $|(f_n - f)(x) \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A^c$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Enfin, comme $m(A) \le \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré la convergence presque uniforme de f_n vers f.

   (b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

   corrigé

   On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ et $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = [0, \varepsilon]$, de sorte que $m(A) = \varepsilon$. On a bien $f_n \to 0$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, car $f_n = 0$ sur A^c pour tout n t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc, $f_n \to f$ presque uniformément quand $n \to \infty$.

   Mais f_n ne tends pas vers 0 essentiellement uniformément, quand $n \to \infty$, car $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (en effet, $f_n \le 1$ sur tout $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ sur $[0, \frac{1}{n}]$) et $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$).

Exercice 4 (Une caractérisation de l'intégrabilité)

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \ge n\}$ et $B_n = \{x \in E, n \le |f(x)| < n+1\}$.

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{8}$$

corrigé

On remarque tout d'abord que $B_n, A_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n 1_{B_n} \le |u| < \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) 1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) \le \int |u| dm < \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n). \tag{9}$$

Si $\int |u| dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n) < \infty$ car $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \le m(E) < \infty$ (remarquer que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \ne m$). On déduit donc de (9) que $\int |u| dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n). \tag{10}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{11}$$

Pour montrer (11), on remarque que $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, comme $B_{n+1} \subset A_n$ et que $m(A_{n+1}) \le m(A_n) \le m(E) < \infty$:

$$m(B_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{n} p\, m(B_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1}) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) = \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1})$. On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(B_p) \le \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{12}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(B_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{13}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$, on déduit donc de (12) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty$.
Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty$. On a, par (10), $\int |u|dm < \infty$ et donc, comme $n\, 1_{A_{n+1}} \le |u|$, on a aussi $n\, m(A_{n+1}) \le \int |u|dm < \infty$. On déduit donc de (13) que $\sum_{p=1}^{n} m(A_p) < \infty$. Comme $m(A_0) \le m(E) < \infty$, on a bien finalement $\sum_{p=0}^{n} m(A_p) < \infty$.

On a bien montré (11), ce qui termine la question.
