

التمرين الأول:

$$(1) \text{ أ- } \overline{AB} \wedge \overline{AC} \left(\left| \begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right| \right) \text{ إذن } \overline{AC}(-1; -1; 1) \text{ و } \overline{AB}(-2; -1; 0)$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1; -2; -1)$$

ب- بما أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) فإن $x - 2y - z + e = 0$ ، (ABC) . و بما أن $C \in (ABC)$ فإن $-1 + e = 0$ أي $e = 1$ و منه فإن $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
ج- بما أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) فإن $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) إذن تمثيل

$$(D): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(2) أ- شعاع الفلكة (S) هو :

$$R = d(\Omega, (ABC)) \\ = \frac{|2 - (2 \times 2) - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ = \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{إذن : } (S): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)^2 \text{ أي } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + \frac{25}{3} = 0$$

التمرين الثاني

(1) نضع $P(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لدينا $0 \leq u_0 \leq 1$ أي $P(0)$ عبارة صحيحة

نفرض أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل عدد صحيح طبيعي أصغر من أو يساوي n لدينا حسب الفرضية السابقة :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[3]{u_n} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt[3]{u_n} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq (1 + \sqrt[3]{u_n})^3 \leq 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8} (1 + \sqrt[3]{u_n})^3 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

أي $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ، \mathbb{N} من n لكل n ، $0 \leq u_n \leq 1$

(2) لكل n من \mathbb{N} لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{8} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 - u_n \\
&= \frac{\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 - 8u_n}{8} \\
&= \frac{\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 - \left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3}{8} \\
&= \frac{\left(1 + \sqrt[3]{u_n} - 2\sqrt[3]{u_n}\right) \left(\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^2 + 2\sqrt[3]{u_n} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right) + \left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8} \\
&= \frac{\left(1 - \sqrt[3]{u_n}\right) \left(\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^2 + 2\sqrt[3]{u_n} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right) + \left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8}
\end{aligned}$$

إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $1 - \sqrt[3]{u_n}$. و بما أن $0 \leq u_n \leq 1$ فإن $\sqrt[3]{u_n} \leq 1$ وبالتالي لكل n من \mathbb{N} $u_{n+1} - u_n \geq 0$ أي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .
خلاصة: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية و مكبورة فهي إذن متقاربة.
(3)- لكل n من \mathbb{N} :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \sqrt[3]{u_{n+1}} - 1 \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{8} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3} - 1 \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2} \sqrt[3]{u_n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} (v_n)
\end{aligned}$$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- لكل n من \mathbb{N} :

$$\begin{aligned}
v_n &= v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

من العلاقة $v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; نستنتج أن $u_n = (v_n + 1)^3 = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)^3$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)^3 = 1$$

(4)

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} + \dots + \sqrt[3]{u_{n-1}} \\
&= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + \dots + (v_{n-1} + 1) \\
&= n + (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) \\
&= n + v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\
&= n - 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

التمرين الثالث

$$(3 + i\sqrt{3})^2 = 9 + 6i\sqrt{3} - 3 = 6 + 6i\sqrt{3} \quad \text{أ- (1)}$$

ب-

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1 + 3i\sqrt{3})^2 + 32 \\
&= 1 + 6i\sqrt{3} - 27 + 32 \\
&= 6 + 6i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{(1 + 3i\sqrt{3}) + (3 + i\sqrt{3})}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \quad \Delta \text{ . إذن } 3 + i\sqrt{3} \text{ هو أحد الجذور المربعة للعدد العقدي } \Delta$$

$$z_1 = \frac{(1 + 3i\sqrt{3}) - (3 + i\sqrt{3})}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_1 = \left[4, \frac{\pi}{3} \right] \quad \text{ج- } \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] , |z_1| = 4 \text{ إذن}$$

$$z_2 = \left[2, \frac{2\pi}{3} \right] \quad \text{إذن } \arg(z_2) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] , |z_2| = 2$$

أ (2)

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_A}{z_B} &= \frac{(-1 + i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3})}{-1 + i\sqrt{3}} \\
&= \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \\
&= \frac{(3 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{4} \\
&= \frac{3 + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3}{4} \\
&= i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

بما أن $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ عدد تخيلي صرف ($\sqrt{3} \in \mathbb{R}_+^*$) فإن $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و نعلم أن

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \left(\widehat{BO, BA}\right) [2\pi]$$

ب- OAB مثلث قائم الزاوية في B ، إذن كي يكون $OBAC$ مستطيل يكفي أن يكون $OBAC$ متوازي الأضلاع أي $\overline{OC} = \overline{BA}$ و بما أن $\overline{BA}(3; \sqrt{3})$ فإن $C(3; \sqrt{3})$ إذن $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

مسألة

← (1) لدينا $f(0) = \sqrt{0 \times \ln(0+1)} = 0$ و بما أن

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e^{2x} - e^x + 1) \\ &= \ln(1 - 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

فإن الدالة f متصلة في 0

← (2) أ- الجواب في متناول الجميع
ب-

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{e^{2x} - e^x} \times e^x \times \frac{e^x - 1}{x} \cdot \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{لأن } \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right) \text{ و } \left(f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{e^{2x} - e^x} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \right)$$

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \\ &= 1 \end{aligned}$$

بما أن $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و $f'(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \ln(x+1)} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) = 0 \quad (3) \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \times \frac{(x+1)}{x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{لأن } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \right) \text{ و } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\ln(h)}{h} = 0 \right)$$

خلاصة: بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ فإن المستقيم $y=0$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإن منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محر الأفاصيل.

← (4) -

- لكل $x < 0$ لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \\ &= \frac{2(e^x)^2 - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \\ &= \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}\end{aligned}$$

لاحظ أن الصيغ e^x و $e^{2x} - e^x + 1$ موجبة قطعاً على $]-\infty; 0[$ [إذن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 0[$ هي إشارة

العدد $2e^x - 1$ (تتعدم عند $x = -\ln 2$)

- لكل $x > 0$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2\sqrt{x \ln(x+1)}}$$

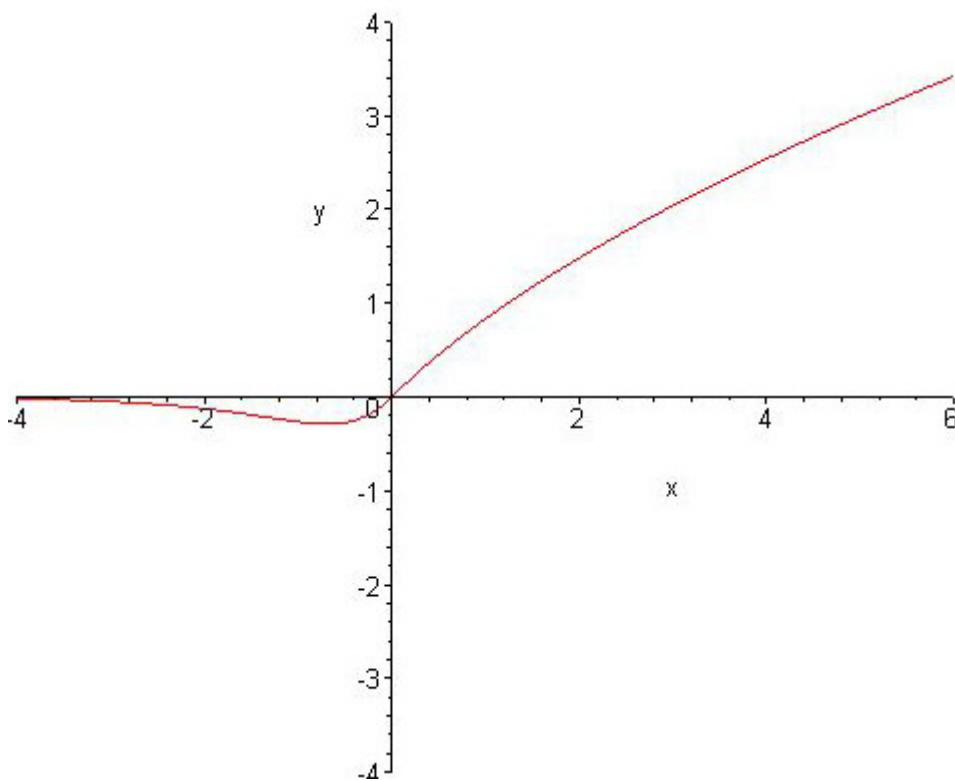
لاحظ أن لكل $x > 0$ ، $x+1 > 1$ أي $\ln(x+1) > 0$ وبالتالي

$$\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} > 0 \text{ أي } f'(x) > 0 \text{ لكل } x \text{ من }]0; +\infty[.$$

-ب-

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0	$\frac{3}{4}$	0	$+\infty$

(5) ←



-أ (6) ←

لكل x من المجال $[0;1]$ لدينا :

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx &= \int_0^1 (x-1) + \frac{1}{x+1} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(2) \end{aligned}$$

ب- الحجم المطلوب هو :

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x \ln(x+1) dx$$

$$u(x) = \ln(x+1) \quad u'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$v(x) = \frac{x^2}{2} \quad v'(x) = x$$

نضع:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx \right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln(2) \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

إذن :

أ- الدالة h متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $I = [-\ln 2; 0]$ إذن فهي تقابل من I نحو المجال

$$h^{-1}: J \rightarrow I \quad J = h(I) = \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right); 0 \right]$$

$$x \mapsto h^{-1}(x) = y$$

و تقبلدالة عكسية من J نحو I لكل x من J و لكل y من I لدينا :

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(e^{2y} - e^y + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^{2y} - e^y + 1$$

$$\Leftrightarrow (e^y)^2 - (e^y) + (1 - e^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^y - \frac{1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2} \right) \left(e^y - \frac{1 - \sqrt{4e^x - 3}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2}$$

$$y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2}\right) \quad \text{إذن :}$$