نيابة عين السبع الحي المحمدي
ثانية الحسين بن علي

امتحان تجريبي2007 (علوم تجريبية)

تمرين1

-1

أ-

$$P(4i)=(4i)^3-(5+7i)(4i)^2+(26i-6)(4i)+24(1-i)$$
$$=-64i+80+112i-104-24i+24-24i$$
$$=0$$

$$(1+3i)^2=1+6i-9$$
$$=-8+6i$$

إذن $4i$ جذر للحدودية $P(z)$ و بالتالي يوجد زوج

$(a;b)\in\mathbb{C}^2$ حيث : $p(z)=(z-4i)(z^2+az+b)$

ب-

$p(z)=(z-4i)(z^2+az+b)$ تكافئ $p(z)=z^3+(a-4i)z^2+(b-4ai)z-4ib$ إذن :
$$\begin{cases} a-4i=-5-7i \\ b-4ai=26i-6 \\ -4ib=24-24i \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} a=-5-3i \\ b=6+6i \end{cases}$$

خلاصة :

- ♦ $p(z)=(z-4i)(z^2+(-5-3i)z+(6+6i))$
- ♦ $P(z)=0 \Leftrightarrow z-4i=0 \quad ou \quad z^2+(-5-3i)z+(6+6i)=0$

$$\Leftrightarrow z=4i \quad ou \quad z^2+(-5-3i)z+(6+6i)=0 \ (E)$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . لدينا:

$$\Delta=(-5-3i)^2-4(6+6i)$$
$$=16+30i-24-24i$$
$$=-8+6i$$
$$=(1+3i)^2$$

إذن $1+3i$ أحد الجذور المربعة للعدد Δ و منه فإن حلول المعادلة (E) هي :

$$z=\frac{5+3i-1-3i}{2} \quad ou \quad z=\frac{5+3i+1+3i}{2}$$
$$z=2 \quad ou \quad =3+3i$$

إذن $S=\{4i;3+3i;2\}$

-2

$$\begin{aligned}\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}&=\frac{4i-2}{(3+3i)-2}\\&=\frac{4i-2}{1+3i}\\&=\frac{(4i-2)(1-3i)}{10}\\&=\frac{4i+12-2+6i}{10}\\&=1+i\\&=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\end{aligned}$$

1

تمرين2:

-1

-أ

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix}\right)$ أي $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;1;1)$

معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي على الشكل : $x+y+z+k=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ فإن $1+0-1+k=0$ أي $k=0$

و منه فإن : $(ABC): x+y+z=0$

-ب

المستقيم (Δ) موجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و يمر من $D(2,1,3)$ إذن $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\ (t\in\mathbb{R})\\z=3+t\end{cases}$

-ج

لنحدد قيمة البارامتر t حيث $(2+t)+(1+t)+(3+t)=0$ أي $t=-2$ ومنه فإن $H(0;-1;1)$

-2

-أ

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفلكة . إذن $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ أي $(2-x)(-x)+(1-y)(-1-y)+(3-z)(1-z)=0$

ومنه فإن : $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

-ب

ليكن Ω و R مركز و شعاع الفلكة (S) على التوالي . لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\frac{DH}{2}=R$ إذن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC) في النقطة H .

-ج

هذا المستوى هو المستوى المار من D و الموازي ل (ABC) إذن معادلته هي كذلك تكتب على شكل $x+y+z+k=0$ و بما أن النقطة $D(2,1,3)$ تنتمي إليه فإن $2+1+3+k=0$ أي $k=-6$ إذن معادلة المستوى هي $x+y+z-6=0$

تمرين3:

-1

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\left|\ln x\right|^{3}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}(\ln x)^{3}dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)^{3}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(\ln x)^{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\frac{1}{4}\left[(\ln x)^{4}\right]_{1}^{e}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

-2

$$u(x)=Arc\tan x \qquad u'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$$

$$v(x)=x^{2} \qquad v'(x)=2x$$

$$J=\left[x^{2}Arc\tan x\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{1+x^{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(\int_{0}^{1}1-\frac{1}{1+x^{2}}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left[x-Arc\tan x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

-3

$$x=\sqrt{e^t+1}\Rightarrow x^2=e^t+1\Rightarrow 2xdx=e^t dt$$
$$t=\ln 8\Rightarrow x=3$$
$$t=\ln 3\Rightarrow x=2$$

$$\begin{aligned}K&=\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^t}{4(e^t+1)+2\sqrt{e^t+1}}dt\\&=\int_2^3\frac{2xdx}{4x^2+2x}\\&=\int_2^3\frac{dx}{2x+1}\\&=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2dx}{2x+1}\\&=\frac{1}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_2^3\\&=\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 5)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{5}\right)\end{aligned}$$

مسألة:

1-

أ-

$f(0)=0$

بما أن :

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)-2x=0=f(0)$ لأن $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ نهاية مرجعية ، فإن f متصلة في الصفر

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)-2x\\&=\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x)-2)\\&=+\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{x\to-\infty}(2x-3)e^{2x}+4e^x-1\\&=\lim_{x\to-\infty}(2x)e^{(2x)}-3e^{2x}+4e^x-1\\&=-1\end{aligned}$$

2-

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $h'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$. إشارة $h'(x)$ هي إشارة x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

إذن $\left(\forall x \in IR\right)\ h(x) \geq 0$

-3

-أ

$$\left(\forall x \prec 0\right): \frac{f(x)}{x} = \frac{(2x-3)e^{2x}+4e^{x}-1}{x}$$
$$= \frac{2xe^{2x}-3e^{2x}+3+4e^{x}-1}{x}$$
$$= \frac{2xe^{2x}-3\left(e^{2x}-1\right)+4\left(e^{x}-1\right)}{x}$$
$$= 2e^{2x}-\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+\frac{4(e^{x}-1)}{x}$$

ب-

بما أن :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}-\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+\frac{4(e^{x}-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}-6\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)+4\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)$$
$$= 2-6+4$$
$$= 0$$

فإن f قابلة للاشتقاق على يسار الصفر و $f_g^{'}(0)=0$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)-2x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\ln(x)-2$$
$$= -\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و منحناها يقبل نصف مما موازي لمحور الأراتيب على يمين الصفر موجه نحو الأراتيب السالبة .

-4

-أ

Sajid mohammed sajid@madariss.fr www.madariss.fr

$(\forall x \succ 0): f'(x) = \ln(x) + 1 - 2$

$= \ln(x) - 1$

♦ $f'(x)$ تنعدم في $x = e$

♦ $f'(x) \succ 0 \Rightarrow x \succ e$

♦ $f'(x) \prec 0 \Rightarrow 0 \prec x \prec e$

$(\forall x \leq 0): f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-3) + 4e^{x}$

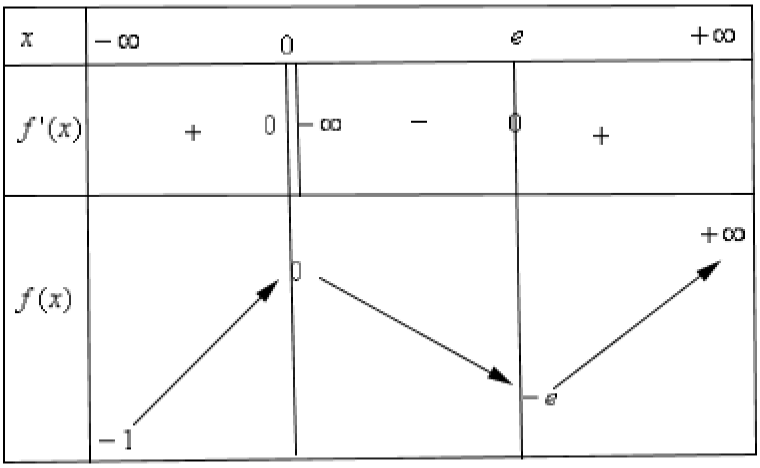
$= 4e^{2x}(x-1) + 4e^{x}$

$= \left(e^{x}(x-1)+1\right) \times 4e^{x}$

$= h(x) \times 4e^{x}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;0]$ هي إشارة $h(x)$

ب-



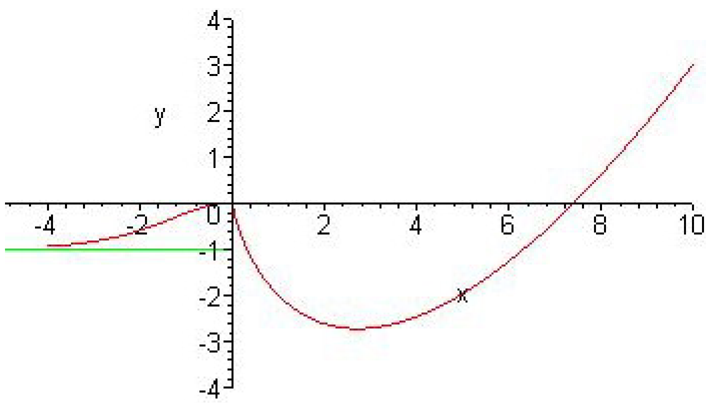
-5

أ-

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 2 = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

ب-

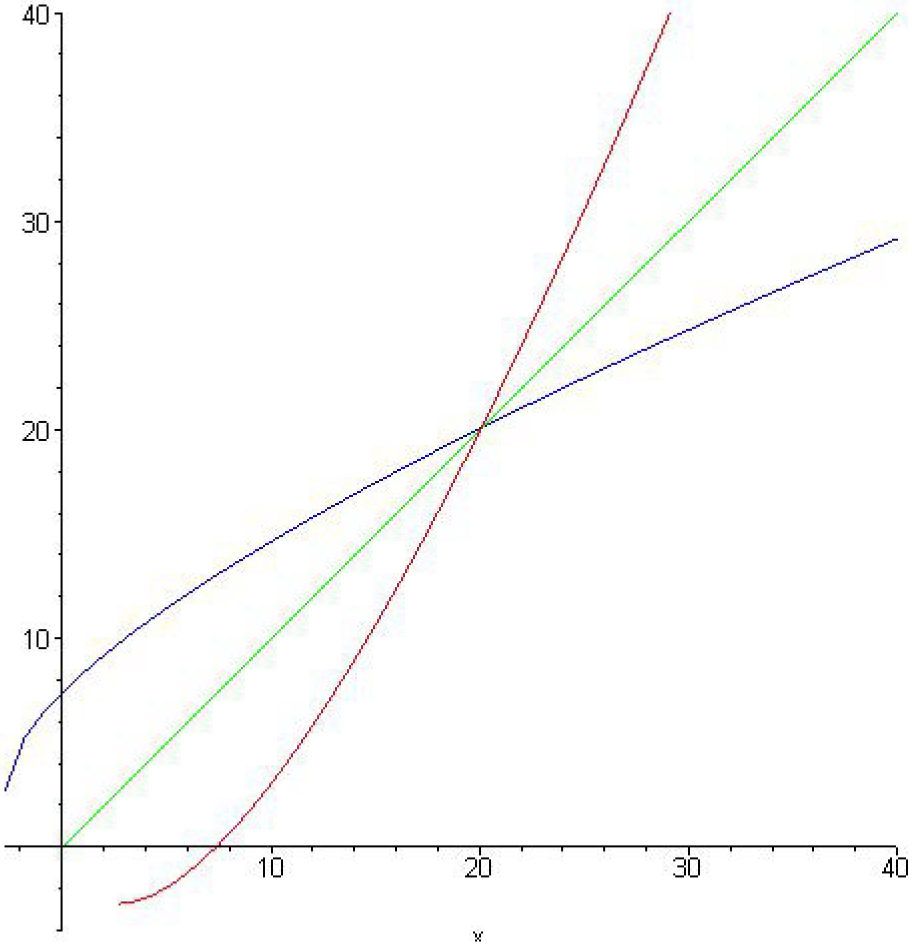
$(\forall x \succ 0): f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 2$ أي $x = e^{2}$



-6

بما أن g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=[e,+\infty[$ فإنها تقابل من I نحو $J=g(I)=g([e;+\infty[)$ أي $J=[-e;+\infty[$

ب-



-7

أ-

لاحظ أن g و g^{-1} و المنصف الأول يلتقيان في النقطة التي أفصولها e^3 و هذا يعني أن $g(e^3)=g^{-1}(e^3)=e^3$

لدينا $-e\le u_0\le e^3$ نفترض أنه توجد رتبة n_0 من $\mathbb{N}$ حيث لكل $n\le n_0$: $-e\le u_n\le e^3$. لتبث أن $-e\le u_{n+1}\le e^3$

بما أن $-e\le u_n\le e^3$ و g^{-1} تزايدية قطعا على $[-e;+\infty[$ فإن $g^{-1}(-e)\le g^{-1}(u_n)\le g^{-1}(e^3)$ أي $-e\le e\le u_{n+1}\le e^3$

إذن : $(\forall n\in IN)\quad -e\le u_n\le e^3$

ب-

لاحظ أنه على المجال $[-e,e^3]$ منحنى الدالة g^{-1} فوق المنصف الأول أي : $\forall x\in[-e,e^3]: g^{-1}(x)-x\ge 0$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=g^{-1}(u_n)-u_n\ge 0$ أي (u_n) تزايدية .

ج-

بما أن (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد e^3 فإن (u_n) متقاربة و نهايتها هي حل المعادلة $l=g^{-1}(l)$

$$\begin{aligned} l=g^{-1}(l)&\Rightarrow g(l)=l\\ &\Rightarrow \ln(l)-2=1\\ &\Rightarrow \ln(l)=3\\ &\Rightarrow l=e^3 \end{aligned}$$