التمرين الأول :

1. لدينا : $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$$I = 1-\left[Arc\tan x\right]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = 1-\frac{\pi}{4}}$.

2. نضع : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=x \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=1 \end{cases}$.

لدينا u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[0,\ln 2]$؛ و u' و v' دالتين متصلتين على المجال $[0,\ln 2]$. حسب المكاملة بالأجزاء ؛ لدينا :

$$J=\int_0^{\ln 2} u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} u(x)v'(x)dx = \left[xe^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx$$

$$J=\ln(2)e^{\ln(2)} - 0 - \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = 2\ln(2) - \left(e^{\ln(2)}-1\right) = 2\ln(2)-1$$

وبالتالي فإن : $\boxed{J=\int_0^{\ln 2} xe^x dx = 2\ln(2)-1}$.

التمرين الثاني :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة :

$$(E) \ : \ z^2+\left[2+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right]z+1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$$

1. لدينا : $(-1-i)^2+\left[2+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right](-1-i)+1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$

$$=2i-2-2i-i\left(1-\sqrt{3}\right)+1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$$

إذن : $\boxed{z_1=-1-i}$ حل للمعادلة (E) . ليكن z_2 الحل الآخر للمعادلة (E).

نعلم أن : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2+i\left(1-\sqrt{3}\right)}{1}=-2-i\left(1-\sqrt{3}\right)$.

إذن : $z_2=-2-i\left(1-\sqrt{3}\right)-z_1=-2-i\left(1-\sqrt{3}\right)+1+i=\boxed{-1+i\sqrt{3}}$

2. لدينا : $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ ؛ إذن :

$$z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\left[\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right]$$

ولدينا : $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$ ؛ إذن :

$$z_2=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left[2,\pi-\frac{\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]$$

3. الشكل المثلثي ل Z هو: $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left[\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right]}{\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\pi}{12}\right]$

والشكل الجبري ل Z هو :

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1-i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(-1-i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

ومنه نستنتج أن : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$.

التمرين الثالث :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛ نعتبر :

النقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(3,0,1)$ ؛

والمستويين: $(P):\ x+y+z-1=0$ و $(Q):\ 2x+y+2z+3=0$.

1. ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (Q) .

لدينا : $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q) ولدينا $(\Delta)\perp(Q)$ ؛ إذن :

$\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) . لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$ ؛

لدينا : $M\in(\Delta) \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستقيميتان

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2t \\ y+1 = t \\ z-0 = 2t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

2. لدينا $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q) و $\vec{v}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) ؛ ولدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+\vec{k}\neq\vec{0}$$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان غير مستقيميتان ؛ ومنه فإن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (D) موجه بالمتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,0,1)$ ؛ معادلتين ديكارتيتين له هما : $\begin{cases} x+y+z-1 = 0 \\ 2x+y+2z+3 = 0 \end{cases}$.

من أجل $z=1$ (مثلا) ؛ نجد : $\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+y+5 = 0 \end{cases}$. إذن :

$\begin{cases} y = -x \\ 2x-x+5 = 0 \end{cases}$ ؛ ومنه فإن : $\begin{cases} y = 5 \\ x = -5 \end{cases}$ ؛

وبالتالي فإن النقطة $C(-5,5,1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$ ؛ لدينا :

$M\in(D) \Leftrightarrow$ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و $\overrightarrow{CM}$ مستقيميتان

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{CM}=t\,\vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$M\in(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = -t \\ y-5 = 0 \\ z-1 = t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5-t \\ y = 5 \\ z = 1+t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (D)؛

((D) هو تقاطع المستويين (P) و (Q))

3. ليكن (R) المستوى المار من النقطة B والعمودي على المستويين (P) و (Q)

إذن (R) عمودي على المستقيم (D) ؛ وبما أن $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) ؛ فإنها متجهة منظمية على المستوى (R) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$. لدينا :

$$M\in(R) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)+(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -x+z+2=0$$

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للمستوى (R) هي : $\boxed{-x+z+2=0}$.

4. لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,3)$ وشعاعها $R=3$.

أ- لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$. لدينا :

$$M\in(S) \Leftrightarrow \Omega M=R$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$$

ب- لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1+1+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<R$ ؛ إذن :

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة $\mathscr{C}(\omega,r)$ التي :

شعاعها : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{16}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{33}}{3}}$.

مركزها $\omega(x,y,z)$ هو المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P):

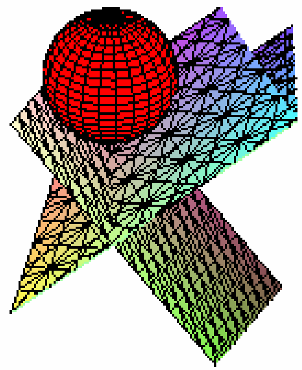
لدينا $\overrightarrow{AB}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)؛ $\ll \overrightarrow{AB}\perp(P)\gg$

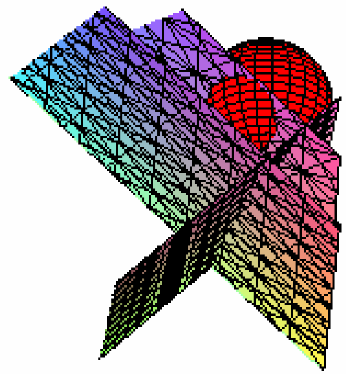
و $A(2,-1,0)\in(P)$ ؛ إذن $\omega=A$ هو مركز الدائرة $\mathscr{C}(\omega,r)$.

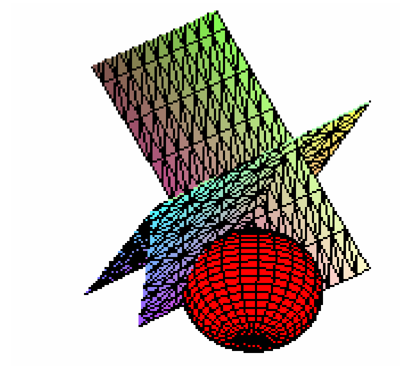
وبالتالي فإن : $(S)\cap(P)=\mathscr{C}\left(A,\frac{\sqrt{33}}{3}\right)$ حيث : $A(2,-1,0)$.

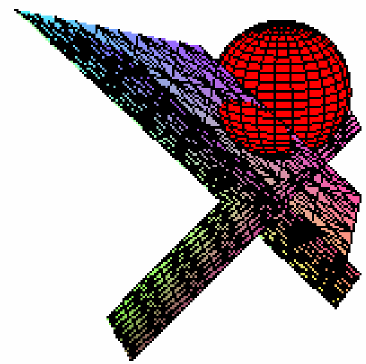
نعطي الشكل النهائي بواسطة البرنامين Maple و winplot كما يلي :

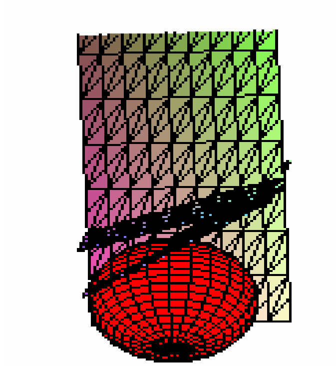
```
with(geometry) :
with(geom3d) :
plane(P,x+y+z=1,[x,y,z]) :
plane(Q,2*x+y+2*z=-3,[x,y,z]) :
plane(R,-x+z=-2,[x,y,z]) :
line(D,[P,Q]) :
_EnvXName :=x :     _EnvYName :=y :     _EnvZName :=z :
sphere(S,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9,[x,y,z]) ;
intersection(D,P,Q) ;
ArePerpendicular(P,R) ;     ArePerpendicular(Q,R) ;
draw([P,Q,R ,D,S(color=red)]);
```

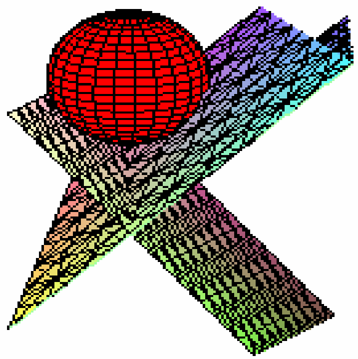


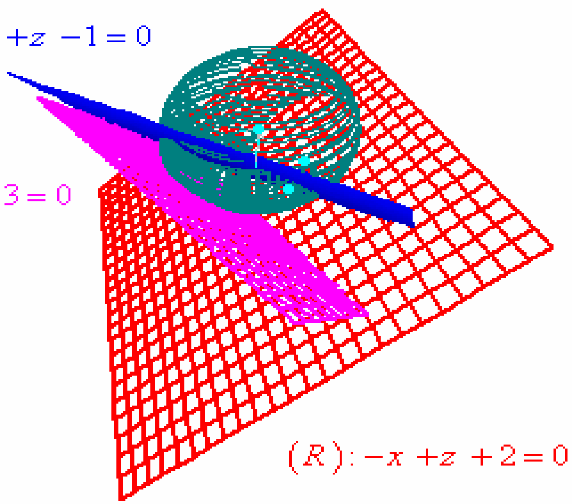


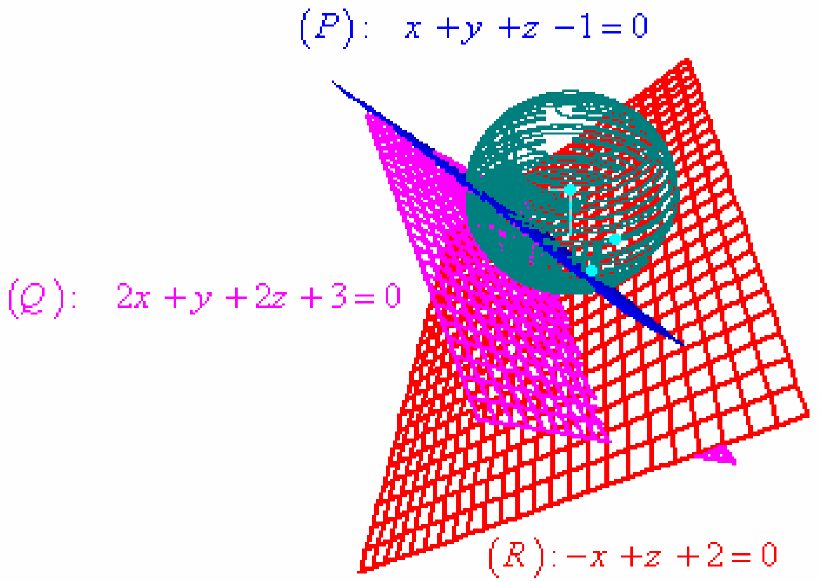












التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+\ln(3-x) & ; \ x\le 2 \\ f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} & ; \ x>2 \end{cases}$$

1. أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(3-x)=\lim\limits_{t\to+\infty} 3-t+\ln(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} 3-t\left(1-\frac{\ln(t)}{t}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$

حيث : $t=3-x$ ؛ ولدينا : $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+|x|\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} x+\sqrt{x^2-2x}=2$

و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} x+\ln(3-x)=2+\ln(1)=2$ و $f(2)=2$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2)$ ؛ فإن f متصلة في النقطة 2.

2. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+\ln(3-x)-2}{x-2}$.

نضع $t=3-x$. إذن : $x\to2^- \Leftrightarrow t\to1^+$ و منه فإن :

$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{t\to1^+}\frac{1-t+\ln(t)}{1-t}=\lim\limits_{t\to1^+}1+\frac{\ln(t)}{1-t}1-1=\boxed{0}$.

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 ولدينا : $\boxed{f_g'(2)=0}$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+\sqrt{x^2-2x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{x^2-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}=\boxed{+\infty}$.

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 2 .

ب- لدينا : f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 و $f_g'(2)=0$. إذن $\mathcal{C}_f$ يقبل نصف مماس على اليسار في النقطة التي أفصولها 2 معادلته :

$\begin{cases} y=f_g'(2)(x-2)+f(2) \\ x\le 2\end{cases}$ أي $\boxed{\begin{cases} y=2 \\ x\le 2\end{cases}}$ (T_g) . ($f(2)=2$ و $f_g'(2)=0$)

لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$. إذن $\mathcal{C}_f$ يقبل نصف مماس رأسي ؛ موجه نحو الأعلى؛ على اليمين في النقطة التي أفصولها 2 .

3. ليكن $x\in]2,+\infty[$. لدينا :

$$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)'=1+\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}>0$$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $]2,+\infty[$.

ليكن $x\in]-\infty,2[$. لدينا :

$$f'(x)=\left(x+\ln(3-x)\right)'=1+\frac{(3-x)'}{3-x}=1-\frac{1}{3-x}=\frac{2-x}{3-x}>0$$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $]-\infty,2[$.

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0 \,\|\, +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-2x}-2x+1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}-x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2+2x+1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x-1}=0$$

إذن $\mathscr{C}_f$ يقبل مقاربا مائلا ؛ بجوار $+\infty$ ؛ معادلته : $\boxed{y=2x-1}$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و بوضع $t=3-x$ ؛ نجد $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$ و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\ln(3-x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{\ln(3-x)}{x}=\lim_{t\to+\infty}1+\frac{\ln(t)}{3-t}=\lim_{t\to+\infty}1+\frac{\ln(t)}{t}\times\frac{1}{\frac{3}{t}-1}=1$$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\ln(3-x)=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)=\boxed{+\infty}$ ؛ حيث $t=3-x$.

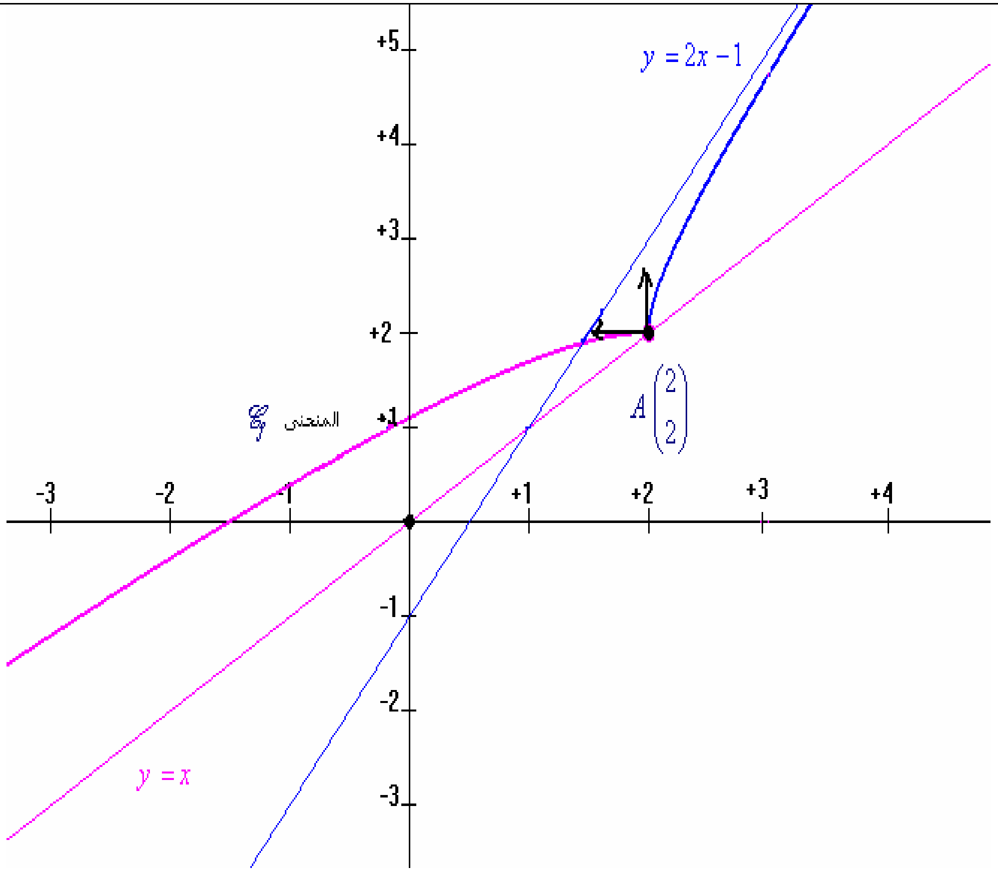
إذن $\mathscr{C}_f$ يقبل فرعا شلجميا ؛ بجوار $-\infty$ ؛ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x}$.

5. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}_f$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:

ننشئ الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\mathscr{C}_f$.

ننشئ نصفي مماس للمنحنى $\mathscr{C}_f$ في النقطة ذات الأفصول2.

نحسب بعض الصور عند الاقتضاء .



6. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2,+\infty[$.

أ- لدينا g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[2,+\infty[$. إذن g تقابل من المجال $[2,+\infty[$ نحو المجال $J=g([2,+\infty[)=\left[g(2),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[=[2,+\infty[$.

ب- لدينا : $\begin{array}{rccc} g^{-1} : & [2,+\infty[& \to & [2,+\infty[\\ & x & \mapsto & y=g^{-1}(x)? \end{array}$.

ليكن $x\in[2,+\infty[$ و $y\in[2,+\infty[$ بحيث : $y=g^{-1}(x)$ ينبغي تحديده ؟

لدينا :

$$\begin{aligned} y=g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x=g(y) \\ &\Leftrightarrow x=y+\sqrt{y^2-2y} \\ &\Leftrightarrow x-y=\sqrt{y^2-2y} \end{aligned}$$

$$y = g^{-1}(x) \Rightarrow (x-y)^2 = y^2 - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xy + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 = 2xy - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 = (2x-2)y$$
$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

وبالتالي فإن :
$$g^{-1} : [2,+\infty[\to [2,+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$$

7. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(3-u_n) = f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ؛ لدينا : $u_0 = 1$. إذن : $0 < u_0 \le 2$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$. ☜ نفترض أن : $0 < u_n \le 2$.

☜ نبين أن : $0 < u_{n+1} \le 2$.

لدينا f تزايدية قطعا على المجال $]0,2]$ ؛ إذن :
$$0 < u_n \le 2 \Rightarrow f(0) < f(u_n) \le f(2) \Rightarrow 0 < \ln(2) < u_{n+1} \le 2 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le 2$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 0 < u_n \le 2}$

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n)$. وبما أن :
$0 < u_n \le 2 \Rightarrow -2 \le -u_n < 0 \Rightarrow 1 \le 3-u_n < 3$ ؛ فإن: $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n) \ge 0$

ومنه فإن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

جـ- لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2 . إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

ولدينا : ☜ $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; u_n \in]0,2]$.

☜ f دالة متصلة على المجال $]0,2]$.

☜ $f(]0,2]) =]\ln(2),2] \subset]0,2]$: $]0,2]$ مستقر بالدالة f .

☜ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l

إذن : $\boxed{l=2} \Leftrightarrow 3-l=1 \Leftrightarrow \ln(3-l)=0 \Leftrightarrow l = l+\ln(3-l) \Leftrightarrow f(l)=l$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$.