الامتحان التجريبي 2004

التمرين الأول :

1) $x=\ln 4 \Rightarrow t=\sqrt{3}$ و $x=\ln 2 \Rightarrow t=1$

$t=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow x=\ln\left(1+t^2\right)$ ومنه $dx=\frac{2t\ dt}{1+t^2}$ إذن : $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2dt}{1+t^2}=\left[2Arctg(t)\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

2) $J=\left[xArctg(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ و $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \Rightarrow J=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$

التمرين الثاني :

1) أ-

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}$	$\frac{C_2^2+C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}$

ب- $p(A)=\frac{C_2^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{10}$.

ج- الحدث $A\cap(X=2)$ هو " سحب بيدقتين تحملان الرقم 1" ، إذن $p(A\cap(X=2))=\frac{1}{10}$.

و لدينا $p(A)p(X=2)=\frac{3}{50}$ ، إذن الحدثان $(X=2)$ وA غير مستقلين($\frac{1}{10}\neq\frac{3}{50}$)

2) لدينا $p=C_3^2\left[p(A)\right]^2\left[1-p(A)\right]+C_3^3\left[p(A)\right]^3$ إذن $p=\frac{13}{125}$.

التمرين الثالث :

1) $\Delta=-4i=2(1-i)^2 \Rightarrow z'=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ و $z''=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

2) $|z''|=\sqrt{\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$|z'|=\sqrt{\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

3) $z'z''=1+i$ (جداء جذري az^2+bz+c يساوي $\frac{c}{a}$) و $z'+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left[1,\frac{3\pi}{4}\right]$.

4) لدينا $z'+1=Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+iSin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow z'=-1+Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+iSin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

إذن $z'=-2Sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+2iSin\left(\frac{3\pi}{8}\right)Cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ($Sin\alpha=2Sin\frac{\alpha}{2}Cos\frac{\alpha}{2}$ و $Cos\alpha=1-2Sin^2\frac{\alpha}{2}$)

يعني $z'=2Sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(-Sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+iCos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$ و منه $\boxed{Arg(z')=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}}$

من جهة أخرى ، $z'z''=1+i \Leftarrow Arg(z'z'')=\frac{\pi}{4}$

يعني $Arg(z')+Arg(z'')=\frac{\pi}{4}$ إذن $\boxed{Arg(z'')=-\frac{5\pi}{8}}$.

التمرين الرابع:

1) $\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$ و $\overrightarrow{AB}(-4,1,1) \Leftarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC) إذن $(ABC):x+2y+2z+d=0$

$C\in(ABC) \Leftarrow d=2$ و بالتالي $(ABC):x+2y+2z+2=0$.

2) لدينا $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$ إذن $r=3$ و $\Omega(1,1,2)$.

3) $d(\Omega,(ABC))=\frac{|1+2+4+2|}{\sqrt{9}}=3=r \Leftarrow (ABC)$ مماس للفلكة (S) .

$H(a,b,c)$ نقطة التماس هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(1,1,2)$ على (ABC) ، إذن :

$$\exists t\in IR \;/\; \begin{cases} a=1+t \\ b=1+2t \\ c=2+2t \\ a+2b+2c+2=0 \end{cases} \Rightarrow t=-1 \Rightarrow H(0,-1,0).$$

مسألة :

-I

1) أ- $f(-1)=0$ و $\lim_{-1^-}f(x)=\lim_{-1^+}f(x)=0$ إذن f متصلة في 1- .

ب- $\lim_{-1^+}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{-1^+}\frac{x\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\lim_{-1^+}x\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}=-\infty$ ، إذن f غير قابلة للاشتقاق في -1^+

C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(-1,0)$ على اليمين .

ث- $\lim_{-1^-}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{-1^-}\frac{(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}}{x+1}=\lim_{-1^-}(1-x)e^{\frac{-x^2}{2}}=2e^{\frac{-1}{2}}$ ، إذن f قابلة للاشتقاق في -1^-

C_f يقبل نصف مماس معامله الموجه $2e^{\frac{-1}{2}}$ في النقطة $A(-1,0)$ على اليسار.

ج- $\lim_{+\infty}f(x)=\lim_{+\infty}x\sqrt[3]{x+1}=+\infty$ و $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x+1}=+\infty$

C_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

د- $\lim_{-\infty}f(x)=\lim_{-\infty}(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}=\lim_{-\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}+2.\frac{-x^2}{2}e^{\frac{-x^2}{2}}=0$ (ضع $t=\frac{-x^2}{2}$)

C_f يقبل محور الأفاصيل كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$.

2) أ- إذا كان $x \succ -1$: $f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+x\left[\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{-2}{3}}\right] \Leftarrow f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+\frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

يعني $f'(x)=\frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

إذا كان $x \prec -1$: $\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right)$ $f'(x)=-2xe^{\frac{-x^2}{2}}+(1-x^2) \Leftarrow f'(x)=x(x^2-3)e^{\frac{-x^2}{2}}$.

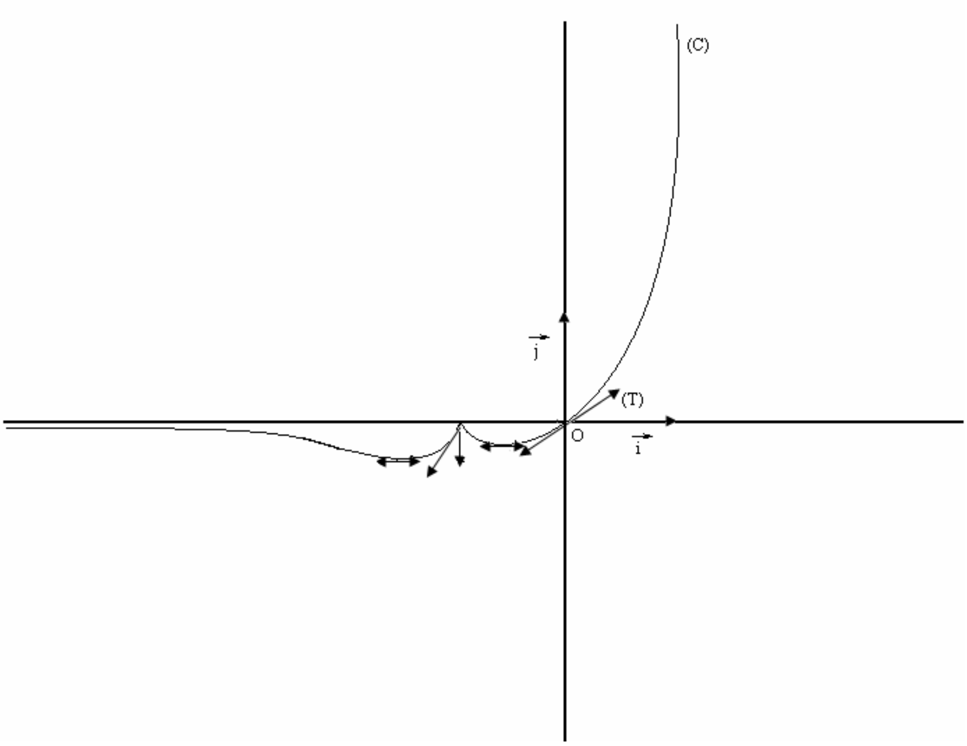
ب-

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$\frac{-3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		--	0	+	‖	--	0	+	
$f'(x)$	0	↘	$-2e^{\frac{-3}{2}}$	↗	0	↘	$\frac{-3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	↗	$+\infty$

3) لكل x من $[-1,+\infty[$ لدينا $f(x)-x=x(\sqrt[3]{x+1}-1)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\geq 0$.

4) أ- $(T): y=f'(0)x+f(0)$ يعني $(T): y=x$

ب- المنحنى :



-II

1) لدينا $U_0 \in [-1,+\infty[$. نفترض أن $U_n \in [-1,+\infty[$ إذن $h(U_n) \in h([-1,+\infty[) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},+\infty\right[$

يعني $U_{n+1} \in [-1,+\infty[$ ، وبالتالي $\boxed{\forall n \geq 0 \ U_n \in [-1,+\infty[}$

حسب السؤال 3 من الجزء الأول ، وبوضع $x = U_n$ نجد $U_{n+1} = h(U_n) \geq U_n$. إذن (U_n) تزايدية.

2) أ- من أجل $n = 0$: $-1 \leq U_0 \prec 0$ ، نفترض أن $-1 \leq U_n \prec 0$.

لدينا إذن $U_n \in [-1,0[$ يعني $h(U_n) \in h([-1,0[) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},0\right[$ و بالتالي $U_{n+1} \in [-1,0[$.

إذن $\boxed{\forall n \geq 0 \ U_n \in [-1,0[}$.

ب- (U_n) تزايدية ومكبورة ب0 إذن فهي متقاربة.

نضع $I = [-1,0[$. h متصلة على I و $h(I) \subset I$ و (U_n) متقاربة، إذن نهايتها l تحقق $h(l) = l$.

أي $l\left(1-\sqrt[3]{l+1}\right) = 0$ ومنه $\boxed{l = 0}$.

3) أ- لدينا $U_{n+1} - U_n = U_n\left(\sqrt[3]{1+U_n} - 1\right)$ و $U_n \geq U_0$ ((U_n) تزايدية) ، إذن(وبما أن $U_0 \succ 0$)

نجد $U_{n+1} - U_n \geq U_0\left(\sqrt[3]{1+U_0} - 1\right)$ لكل n من IN .

ب- من أجل $n = 0$: $U_0 \geq U_0$ (العلاقة محققة) . نفترض أن $U_n \geq U_0 + n\lambda$

و لدينا $U_{n+1} \geq U_n + \lambda$ إذن $U_{n+1} \geq U_0 + n\lambda + \lambda$ أي $U_{n+1} \geq U_0 + (n+1)\lambda$.

إذن $U_n \geq U_0 + n\lambda$ لكل n من IN .

ج- لدينا $\lambda \succ 0$ إذن $\lim U_0 + n\lambda = +\infty$ و منه $\boxed{\lim U_{n.} = +\infty}$.