التمرين الأول:

1) a)- لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-2,-2)$ إذن

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}0&-2\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1&0\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = \boxed{-2\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)}$$

b)- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) نستنتج من 1) a) أن المتجهة $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ منظمية على المستوى (ABC) إذن معادلة هذا الأخير هي على شكل:

$$x - y + z + d = 0$$

وبما أن $A(0,1,1)\in(ABC)$ فإن $d = 0$ و بالتالي فإن:

$$\boxed{(ABC): x - y + z = 0}$$

3) a)- يمكن لمعادلة الفلكة (S) أن تكتب : $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z)^2=(1)^2}$ إذن شعاع (S) هو $\boxed{R=1}$ و مركزها هو $\boxed{\Omega(1,2,0)}$

b)- لتكن d مسافة Ω عن المستوى (ABC) لدينا:

$$d = \frac{|1-2+0|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ إذن $d < R$ و بالتالي

فإن: المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

c)- **ليكن R' شعاع (Γ)؛ $R' = \sqrt{R^2 - d^2} = \boxed{\sqrt{6}/3}$

**لتكن النقطة $H(x_H, y_H, z_H)$ مركز (Γ)؛ نجد من

$x_H - y_H + z_H = 0$ و $\begin{cases}x_H = 1+k\\ y_H = 2-k\\ z_H = k\end{cases}$ ؛ $k\in\mathbb{R}$: $\boxed{H\begin{pmatrix}4/3\\ 5/3\\ 1/3\end{pmatrix}}$

4) ليكن (P) أحد المستوين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S)

معادلة (P) هي على شكل: $x - y + z + m = 0 / m\in\mathbb{R}$

لتكن d' مسافة Ω عن (P) لدينا $d' = R$ و

$$d' = R \Leftrightarrow \frac{|1-2+0+m|}{\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow m = 1-\sqrt{3} \text{ أو } m = 1+\sqrt{3}$$

وباتالي فإن المستويين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S) هما:

$$\boxed{\begin{cases}(P_1): x - y + z + 1 - \sqrt{3} = 0\\ (P_2): x - y + z + 1 + \sqrt{3} = 0\end{cases}}$$

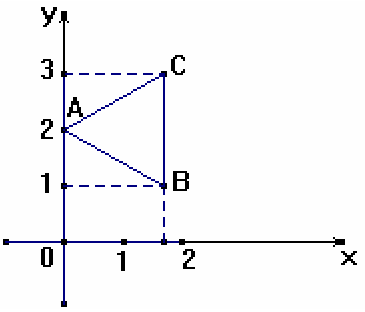
التمرين الثاني: $(E): z\in\mathbb{C}; z^2 - (\sqrt{3}+3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

1) a)- $(-\sqrt{3}+i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

b)- مميز (E) هو $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3} = (-\sqrt{3}+i)^2 \neq 0$ ،إذن ل (E) حلين مختلفين هما: $a = 2i$ و $b = (\sqrt{3}+i)$ وبالتالي: $\boxed{S=\{a,b\}}$

2) a)- $b = \left[2, \pi/6\right]$ و $c = \left[2\sqrt{3}, \pi/3\right]$

b) - إنشاء $A(a=2i)$ و $B(b=\sqrt{3}+i)$ و $C(c=\sqrt{3}+3i)$:



3) a)- $\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\left[1, -\frac{\pi}{3}\right]}$

b)- نستنتج أن $\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الأضلاع}}$

4) a)- $c - a = (\sqrt{3}+3i) - (2i) = \sqrt{3} + i = b$

b) - لدينا $c - a = b - 0$ إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ ولدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع ومنه فإن $\boxed{\text{الرباعي } OBCA \text{ معين}}$.

التمرين الثالث:

1) عدد النتائج الممكنة هو: $A_5^2 \times A_4^1 = (5\times4)\times4 = \boxed{80}$

2) عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم0 هو:

$$A_3^2 \times A_2^1 = (3\times2)\times2 = \boxed{12}$$

3) عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي2هو

$$A_2^2\times A_2^1 + A_2^1\times A_3^1\times A_2^1 + A_3^1\times A_2^1\times A_2^1 = \boxed{28}$$

التمرين الرابع:

1) **

$$\int_{-1}^{1}\left|e^x - 1\right|dx = \int_{-1}^{0}(1-e^x)dx + \int_{0}^{1}(e^x-1)dx$$

$$= \left[x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - x\right]_{0}^{1} = \boxed{\frac{1}{e} + e - 2}$$

**

$$\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx = \int_{e}^{e^2}\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}dx$$

$$= \left[\ln\left(\ln(x)\right)\right]_{e}^{e^2} = \boxed{\ln(2)}$$

2) a)- ليكن $x\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ ،

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}}$$

b)-

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2(x)} = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}\right)dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{\tan(x)}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3

$$J=\left[x\cos\left(\pi\ln(x)\right)\right]_1^e+\pi\int_1^e x\sin\left(\pi\ln(x)\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=-(e+1)+\pi\int_1^e \sin\left(\pi\ln(x)\right)dx=-(e+1)+\pi K$$

$$K=\left[x\sin\left(\pi\ln(x)\right)\right]_1^e-\pi\int_1^e x\cos\left(\pi\ln(x)\right)\frac{1}{x}dx$$

إذن $K=-\pi J$

وبالتـــــــــالي $J=-(e+1)-\pi^2 J$

ومنـــــــه $\boxed{J=-\left(\dfrac{e+1}{\pi^2+1}\right)}$

مسألة:

الجزء الأول:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-1\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

2) a- $(\forall x\in\mathbb{R})\ ,\ g'(x)=e^x-1$

b –

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c- بما أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g عند 0 فإنه:

$$\boxed{\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right),\ g(x)>0}$$

3) نعتبر الدالة h بحيث: $h(x)=g(x)-x$ ، $\left(\forall x\in\left]1,2\right[\right)$، لدينا:

$$\begin{cases}\begin{cases}\left(\forall x\in\left]1,2\right[\right),\\ h'(x)=e^x-2>0\end{cases}\\ h(1)\times h(2)<0\end{cases}$$ إذن $\left(\exists!\alpha\in\left]1,2\right[\right)/\,h(\alpha)=0$

وبالتالي للمعادلة $\left[x\in\mathbb{R},g(x)=x\right]$ حل وحيد في المجال $\left]1,2\right[$

الجزء الثاني:

1) $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)=\boxed{1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]=\boxed{+\infty}$

2) لدينا $f(0)=1$ إذن

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[t\ln^2(t)\right]$$

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[2\sqrt{t}\ln(\sqrt{t})\right]^2=\boxed{0}$$

و

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[\frac{e^{-x}+\ln(x+1)-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[-\frac{1}{e^x}\frac{e^x-1}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=-1+1=\boxed{0}$$

نستنتج جبريا أن f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=0$

و نستنتج هندسيا أن (C_f) يقبل في 0 مماس معادلته $y=f(0)$

أي $\boxed{y=1}$

(3 a-

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad ,f'(x)=\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]'$$

$$=-e^{-x}+\frac{1}{x+1}=e^{-x}\left(\frac{e^x}{x+1}-1\right)$$

$$=e^{-x}\left(\frac{e^x-x-1}{x+1}\right)=\boxed{\frac{e^{-x}g(x)}{(x+1)}}$$

b-

$$\left(\forall x\in\left]-\infty,0\right[\right),f'(x)=\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\boxed{\left(-\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)(x+1)}$$

بما أن $x<0$ فإن $\left(-\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+1$.

c-

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1-\frac{1}{e}$	↗	1	↗	$+\infty$

(4 a-

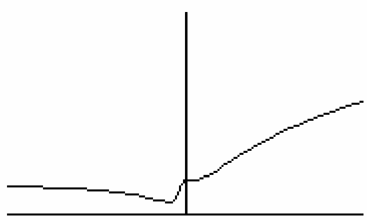
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+\ln(x+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{xe^x}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

b-

* (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل
* (C_f) يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته هي: $y=1$

c-



(5

$$\lambda(\Delta)=\int_0^1\left(e^{-x}+\ln(x+1)\right)dx$$

$$=\left[-e^{-x}+(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^1$$

$$=\boxed{-e^{-1}+2\ln(2)}$$

الجزء الثالث:

1)

* $U_1 = g(U_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1$ ($U_0 = \ln(2)$ لأن)

$= 2 - \ln(2) - 1 = \boxed{1-\ln(2)}$

* بماأن $2 > \alpha > 1$ و $1 > \ln(2)$ فإن: $0 < 1-\ln(2) < \ln(2) < 1 < \alpha$

وبالتالي فإن: $\boxed{0 < U_1 < U_0 < \alpha}$

2) نبين بالترجع على n من $\mathbb{N}$ أن $0 < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_0 < \alpha$ و ذلك حسب السؤال السابق

*فرضية الترجع:ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_n < \alpha$ و نبين أن: $0 < U_{n+1} < \alpha$.

نعلم أن g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ إذن بالخصوص على $[0,\alpha]$

وبما أن $0 < U_n < \alpha$ فإن $g(0) < g(U_n) < g(\alpha)$ و حيث إن

$g(0) = 0$ و $g(\alpha) = \alpha$ و $g(U_n) = U_{n+1}$ فإن $0 < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < \alpha}$

3) نبين بالترجع على n أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_1 < U_0 < \alpha$ وذلك حسب السؤال 1)

*فرضية الترجع: ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$ و نبين أن: $0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$.

نعلم أن g تزايدية قطعا على $[0,\alpha]$ إذن نستنتج من الإفتراض أن

$g(0) < g(U_{n+1}) < g(U_n) < g(\alpha)$ و بالتالي فإن:

$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

إذن المتتالية $\boxed{(U_n) \text{ تناقصية}}$

4) نعتبر المجال $\mathrm{I} = [0,\alpha]$، لدينا

* $\boxed{g \text{ متصلة}}$ و تزايدية قطعا على I وحيث $g(0) = 0 / g(\alpha) = \alpha$

فإن $g(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ إذن $\boxed{g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}}$

* $0 < U_0 < \alpha$ إذن $\boxed{U_0 \in \mathrm{I}}$

* (U_n) تناقصية و مصغورة إذن $\boxed{(U_n) \text{ متقاربة}}$

بهذه المعطيات نستنتج أن نهاية (U_n) ، l، تحقق $l \in \mathrm{I}$ و $g(l) = l$

و بما أن 0 و α هما الحلين الوحيدين في I للمعادلة $g(l) = l$ و

(U_n) تناقصية فإن $l = 0$

خاتمة: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (U_n) = 0}$.